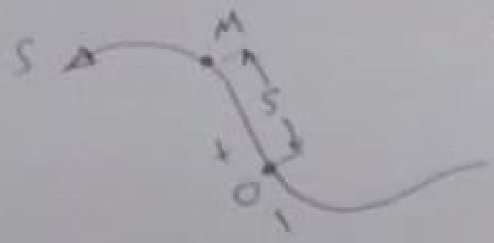
المحاضرة الثانية

٣- طريقة الاحداثيات $(t-n)$ او الطبيعية:



هذه الطريقة تعتبر مسار المتحرك
هو محور الاحداثيات نأخذ
عليه نقطة نعتبرها مبدأ
لهذا المحور O ما قبلها سالب وما بعدها موجب
والمسافة التي تفصل بينها وبين المتحرك M ، S فإذا
علمنا العلاقة التي تحدد هذه المسافة بالزمن t

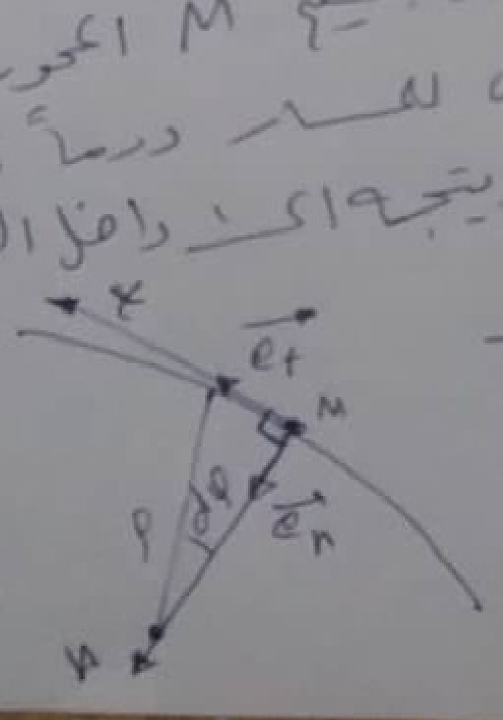
$$S = f(t)$$

فنستطيع من هذه العلاقة تحديد مكان المتحرك مثال

$$S = 3t^2+2$$

اي في اللحظة $t=0$ كان المتحرك على بعد $S=2m$
وفي اللحظة $t=2$ " " " $S=14m$

لدراسة سرعة وتسارع المتحرك M نأخذ مجموعة
محاور متحركة مع النقطة او الجسم M المحور الاول
ندعوه t وهو مماس للمسار دوماً أما
المحور الاخر عامودي عليه ويتجه الى داخل التقعر
وندعوه n



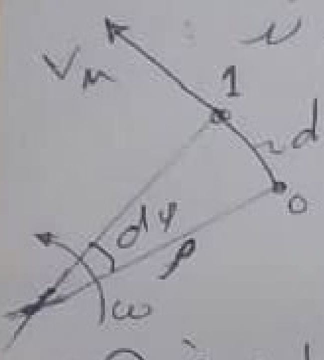
شعاع الواحدة على t هو $\vec{e_t}$
" " " n $\vec{e_n}$

القيمة العددية للسرعة

$$v_M = \dot{S} = \frac{ds}{dt}$$

(2)

في هذه الحالة يمكن اعتبار المتحرك M عندما يقطع مسافة ds خلال زمن dt يتحرك على قوس من دائرة نصف قطرها ρ في كل لحظة عندئذ:



$$ds = \rho\, d\varphi$$

بالتعويض

$$v_M = \frac{\rho\, d\varphi}{dt} = \rho\omega$$

ω السرعة الزاوية للمتحرك بالنسبة لمركز الدوران في هذه اللحظة.

نحن نعلم ان السرعة دائماً مماسة للمسار اي محمولة على المحور t المماس للمسار ودوماً نحو القيم العددية الاتجاهية عندئذ:

$$\vec{V}_M = \dot{s}\,\vec{e}_t = \rho\omega\,\vec{e}_t$$

التسارع:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \frac{d(\rho\omega\vec{e}_t)}{dt} = \rho\varepsilon\,\vec{e}_t + \rho\omega\frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

$\varepsilon = \dot{\omega} = \alpha$ التسارع الزاوي

$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \omega\vec{e}_n$ مشتق شعاع الواحدة الذي يغير منحاه اثناء الحركة

" " " " " $\vec{e}_n$ " " " $\frac{d\vec{e}_n}{dt} = -\omega\vec{e}_t$

$$\vec{a}_M = a_M^t\,\vec{e}_t + \rho\omega.\omega\vec{e}_n = a_M^t\,\vec{e}_t + \rho\omega^2\vec{e}_n$$

$$\vec{a}_M = a_M^t\,\vec{e}_t + a_M^n\,\vec{e}_n = \vec{a}_M^t + \vec{a}_M^n$$

تسارع الجسم M له مركبتين مماسية $\vec{a}_M^t$ وناظمية a_M^n

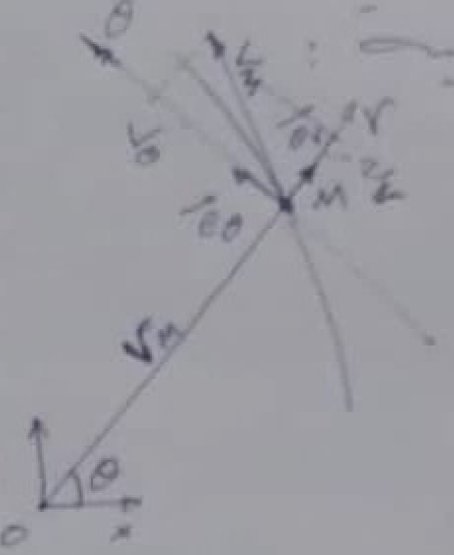
(3)

$$a_M^t = \ddot{S} = \dot{v}_M = \rho\varepsilon \quad m\cdot s^{-2}$$

$$a_M^n = \rho\omega^2 = \frac{v^2}{\rho} = v\cdot\omega \quad m\cdot s^{-2}$$

$$a_M = \sqrt{{a_M^t}^2 + {a_M^n}^2} = \sqrt{(\rho\varepsilon)^2 + (\rho\omega^2)^2} = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

٤- طريقة الاحداثيات القطبية :



لتحديد مكان المتحرك بهذه الطريقه يعني معرفة بعد الجسم M من نقطة مرجعية O r_M حيث r_M طول القطعة المستقيمة ويجب معرفة الزاوية θ في هذه الحالة معادلات الحركة :

$$r = f_1(t)$$

$$\theta = f_2(t)$$

من اجل دراسة السرعة والتسارع نأخذ محورين متعامدين r و θ حيث المحور r يمر دوماً من النقطة المرجعية O والنقطة M ويتحرك معها ونأخذ شعاع الواحده $\vec{e_r}$ والمحور الاخر θ عامودي عليه عند النقطة M وشعاع الواحدة $\vec{e_\theta}$

للاستفادة من العلاقات الشعاعية نقوم بتحويل القيمة العددية للبعد r_M الى قيمة شعاعية لذلك نضربه بشعاع الواحدة $\vec{e_r}$:

شعاع الموضع :

$$\vec{r_M} = r_M \cdot \vec{e_r}$$

(4)

قبل البدء بإيجاد السرعة والتسارع
يجب ان نعلم ان اشعة الواحدة تتغير مع الزمن
ولذلك لها مشتقة :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{e_r}}{dt} &= \dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \\ \frac{d\vec{e_\theta}}{dt} &= -\dot{\theta}\,\vec{e_r} \end{aligned}}$$

$$\vec{V_M} = \frac{d\vec{r_M}}{dt} = \frac{d(r\vec{e_r})}{dt} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\vec{e_r}}$$

$$\vec{V_M} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = v_r\vec{e_r} + v_\theta\vec{e_\theta} = \vec{V_r} + \vec{V_\theta}$$

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \end{aligned}\right\} v_M = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

حيث : v_r : مسقط شعاع السرعة على المحور r

v_θ = = = = θ

$$\vec{a_M} = \frac{d\vec{V_M}}{dt} = \frac{d(\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta})}{dt} =$$

$$= \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e_r})$$

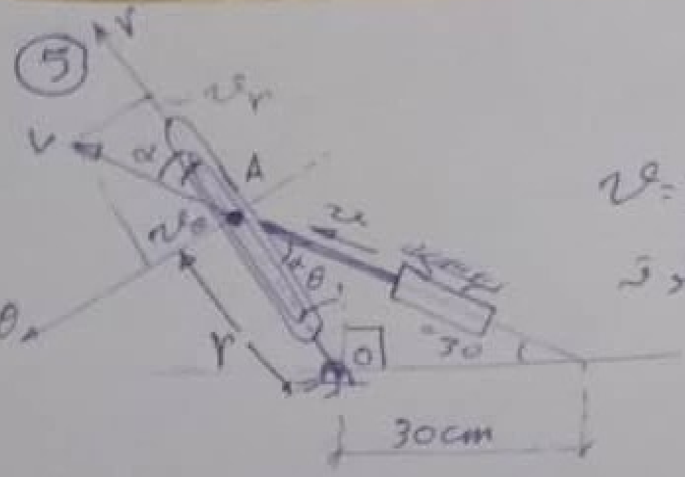
$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a_M} = a_r\vec{e_r} + a_\theta\vec{e_\theta}$$

حيث $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ مركبة شعاع التسارع على r

$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$ = = = = θ

(5)



دورة / 2013 - 2014/

مثال: يتحرك ذراع اسطوانية هيدروليكية بسرعة ثابتة $v=2m.s^{-1}$ مما يؤدي الى دوران الذراع المعقوفة حول O المطلوب في الوضع المبين في الشكل الموافق $\hat{\theta}=30°$ حساب ما يلي:

r ، $\dot{r}$ ، $\dot{\theta}$ ، $\ddot{\theta}$ مع رسم $(v_r , v_\theta , a_r , a_\theta)$.

نستخدم الاحداثيات القطبية حيث بعد النقطة A عن المفصل O متغير تابع للزمن اي تابع للزاوية θ المتغيرة.

بما ان السرعة ثابتة المنحى والقيمة والاتجاه لان ذراع المكبس ... ثابت ويصنع زاوية $30°$ مع الافق $a_A=0$.

مسقط السرعة على r:

$v_r=\dot{r}=v\cos\alpha$

بما ان $\theta=30°$ فان $\hat{O}=120$ أي: $\hat{\alpha}=30°$

$v_r=2\cos30=2\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}\ m.s^{-1} \Rightarrow v_r=\dot{r}\ \sqrt{3}\ m.s^{-1}$

$v_\theta=v\sin\alpha=2\frac{1}{2}=1\ m.s^{-1} \Rightarrow$

$v_\theta=r.\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}=\frac{v_\theta}{r}=\frac{1}{0.3}=3,33\ m.s^{-1}$

حيث $r=30cm$ لان المثلث في هذه اللحظة متساوي الساقين

ملاحظة: بما ان الذراع يتحرك بسرعة ثابتة هذا يعني ان تسارع A معدوم $a_r=a_\theta=0 \Leftarrow a_A=0$

$a_r=\ddot{r}-r\dot{\theta}^2=0 \Rightarrow \ddot{r}=0,3\left(\frac{1}{0.3}\right)^2=\frac{1}{0.3}=3,33\ m.s^{-2}$

$a_\theta=r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}=0 \Rightarrow \ddot{\theta}=-\frac{2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{0,3}}{0,3}=-\frac{2\sqrt{3}}{0,9}\ rad.s^{-2}=-38$